

# 第1讲二次函数与方程、不等式综合（练习）

## 一、二次函数与方程、不等式

1. 下列关于二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 1 (a > 1)$ 的图象与 $x$ 轴交点的判断，正确的是（ ）。
- A. 没有交点  
B. 只有一个交点，且它位于 $y$ 轴右侧  
C. 有两个交点，且它们均位于 $y$ 轴左侧  
D. 有两个交点，且它们均位于 $y$ 轴右侧

【答案】D

【解析】 $\Delta = (-2a)^2 - 4a = 4a(a - 1)$ ，已知 $a > 1$ ，所以 $4a(a - 1) > 0$ ，所以这个方程有两个不相等的实数根，由此可知二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 1 (a > 1)$ 的图象与 $x$ 轴有两个不同的交点。

要确定两个交点在 $y$ 轴的左侧还是右侧，只要确定这两个交点的横坐标的和及积的取值范围即可。

设一元二次方程 $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 的两个根是 $x_1, x_2$ ，根据一元二次方程根与系数的关系可得 $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a} > 0$ ， $x_1 + x_2 = -\frac{-2a}{a} = 2$ ，

由 $x_1 \cdot x_2 > 0$ 可知，这两个根同号，结合 $x_1 + x_2 = 2$ 可知这两个根都是正数，所以二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 1 (a > 1)$ 的图象与 $x$ 轴有两个交点，且交点都在 $y$ 轴的右侧，所以选项D正确。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

2. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (b > a > 0)$ 与 $x$ 轴只有一个交点，以下四个结论：①该抛物线的对称轴在 $y$ 轴左侧；②关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c + 2 = 0$ 有实数根；③ $a + b + c > 0$ ；④ $\frac{b-a}{c}$ 的最大值为1，其中结论正确的为（ ）。
- A. ①②③  
B. ③④  
C. ①③  
D. ①③④

【答案】D

【解析】由题意 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，

①对称轴 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ ，则在 $y$ 轴左侧，正确；

② $\Delta = b^2 - 4ac - 8a = -8a < 0$ ，无实根，错误；

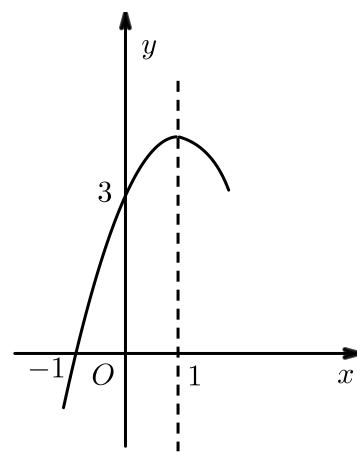
③由①知 $y = ax^2 + bx + c$ 存在唯一解，且此时 $x < 0$ ，  
 若 $x = 1$ ， $y = ax^2 + bx + c = a + b + c > 0$ ，正确；  
 ④当 $x = -1$ 时， $y \geq 0$ ，  
 $\therefore a - b + c \geq 0$ ，  
 $\therefore b - a \leq c$ ，  
 $\therefore \frac{b-a}{c} \leq 1$ ，④正确，  
 故选D。

**【标注】**【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

3. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 对称轴为直线 $x = 1$ ，与 $x$ 轴的一个交点坐标为 $(-1, 0)$ ，其部分图象如图所示，下列结论：

- ① $abc < 0$ ；
- ② $4ac < b^2$ ；
- ③方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根是 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 3$ ；
- ④ $3a + c > 0$ ；
- ⑤当 $y \geq 0$ 时， $x$ 的取值范围是 $-1 \leq x \leq 3$ 。

其中结论正确的个数是（ ）。



- A. 1个                      B. 2个                      C. 3个                      D. 4个

**【答案】** D

**【解析】**  $\because$  抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$\because$  对称轴在 $y$ 轴的右侧，

$$\therefore -\frac{b}{2a} > 0$$

$$\therefore b > 0,$$

$\therefore$  抛物线交  $y$  轴的正半轴,

$$\therefore c > 0,$$

$\therefore abc < 0$ , 故①正确;

$\therefore$  抛物线与  $x$  轴有 2 个交点,

$$\therefore b^2 - 4ac > 0,$$

$\therefore b^2 > 4ac$ , 故②正确;

$\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ,

而点  $(-1, 0)$  关于直线  $x = 1$  的对称点的坐标为  $(3, 0)$ ,

$\therefore$  方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两个根是  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ , 故③正确;

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = 1 \text{ 即 } b = -2a,$$

而  $x = -1$  时,  $y = 0$ , 即  $a - b + c = 0$ ,

$\therefore a + 2a + c = 0$ , 即  $3a + c = 0$ , 故④错误;

$\therefore$  抛物线与  $x$  轴的两点坐标为  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,

$\therefore$  当  $-1 \leq x \leq 3$  时,  $y \geq 0$ , 故⑤正确.

故选 D.

**【标注】**【题型】图象与系数的关系

4. 如图, 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象经过点  $A(-1, 0)$ 、点  $B(3, 0)$ 、点  $C(4, y_1)$ , 若点  $D(x_2, y_2)$  是抛物线上任意一点, 有下列结论:

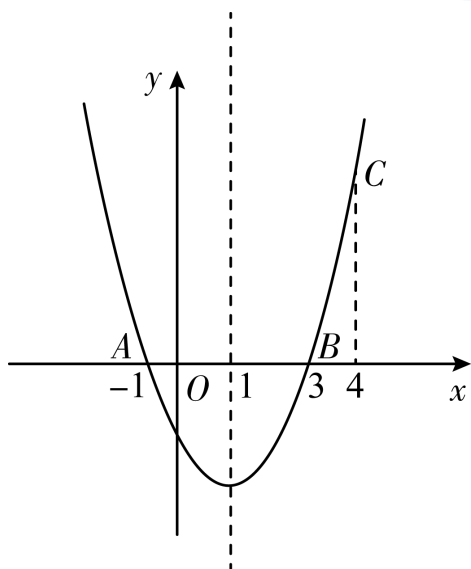
①二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的最小值为  $-4a$ ;

②若  $-1 \leq x_2 \leq 4$ , 则  $0 \leq y_2 \leq 5a$ ;

③若  $y_2 > y_1$ , 则  $x_2 > 4$ ;

④一元二次方程  $cx^2 + bx + a = 0$  的两个根为  $-1$  和  $\frac{1}{3}$

其中正确结论的个数是( )



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**【答案】** B

**【解析】** 解：抛物线解析式为  $y = a(x+1)(x-3)$ ，

$$\text{即 } y = ax^2 - 2ax - 3a,$$

$$\therefore y = a(x-1)^2 - 4a,$$

$\therefore$  当  $x = 1$  时，二次函数有最小值  $-4a$ ，所以①正确；

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时， } y = 9a - 4a = 5a,$$

$\therefore$  若  $-1 \leq x_2 \leq 4$ ，则  $-4a \leq y_2 \leq 5a$ ，所以②错误；

$\therefore$  点  $C(4, 5a)$  关于直线  $x = 1$  的对称点为  $(-2, 5a)$ ，

$\therefore$  若  $y_2 > y_1$ ，则  $x_2 > 4$  或  $x_2 < -2$ ，所以③错误；

$$\therefore b = -2a, c = -3a,$$

$$\therefore \text{方程 } cx^2 + bx + a = 0 \text{ 可化为 } -3ax^2 - 2ax + a = 0,$$

$$\text{整理得 } 3x^2 + 2x - 1 = 0, \text{ 解得 } x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}, \text{ 所以④正确.}$$

故选：B.

**【标注】**【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

5. 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + 3$  ( $a, b$  为常数,  $a \neq 0$ )，且  $b = a + 3$ ，其对称轴在  $y$  轴右侧. 有下列结论：

①  $-3 < a < 0$ ；

② 方程  $ax^2 + bx + 3 = 2$  有两个不相等的实数根；

③ 该抛物线经过定点  $(-1, 0)$  和  $(0, 3)$  .

其中，正确结论的个数为 ( ) .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】D

【解析】 $\because b = a + 3$ ,

$$\therefore b > a,$$

若开口向下, 则  $a < 0$ ,又 $\because$ 对称轴在  $y$  轴右侧, $\therefore$ 左同右异,  $b > 0$ , 符合  $b > a$  的条件,若开口向上, 则  $a > 0$ ,又 $\because$ 对称轴在  $y$  轴右侧, $\therefore$ 左同右异,  $b < 0$ , 不符合  $b > a$  的条件,综上所述,  $a < 0, b > 0$ .

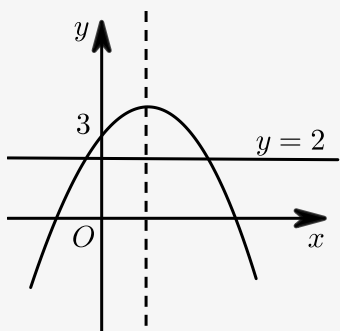
$$\textcircled{1} \because b = a + 3,$$

$$\therefore a + 3 > 0, a > -3,$$

$$\text{又} \because a < 0,$$

$$\therefore -3 < a < 0, \text{故} \textcircled{1} \text{正确}.$$

$$\textcircled{2} \because y = ax^2 + bx + 3 \text{ 与 } y = 2 \text{ 有 } 2 \text{ 个交点},$$

 $\therefore$ 方程  $ax^2 + bx + 3 = 2$  有两个不相等的实数根, 故  $\textcircled{2}$  正确.

$$\textcircled{3} \because b = a + 3,$$

$$\therefore y = ax^2 + (a + 3)x + 3$$

$$= ax^2 + ax + 3x + 3$$

$$= a(x^2 + x) + 3x + 3.$$

$$\text{令 } x^2 + x = 0,$$

$$x(x + 1) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时}, y = 3,$$

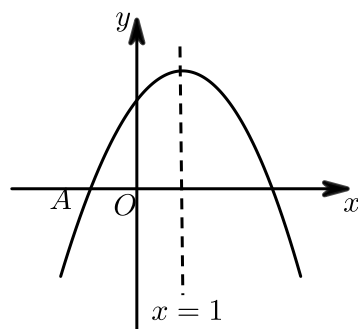
$$\text{当 } x = -1 \text{ 时}, y = 0,$$

∴抛物线过定点 $(0, 3)$ 和 $(-1, 0)$ ，故③正确．

∴正确的结论有3个．

**【标注】**【题型】图象与系数的关系

6. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 $x$ 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，顶点坐标 $(1, n)$ ，与 $y$ 轴的交点在 $(0, 2)$ ， $(0, 3)$ 之间（包含端点），则下列结论：① $3a + b < 0$ ．② $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ ．③对于任意实数 $m$ ， $a + b \geq am^2 + bm$ 总成立．④关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = n - 1$ 有两个不相等的实数根．其中正确结论的个数为（ ）．



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**【答案】** D

**【解析】** ∵抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

而抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$ ，即 $b = -2a$ ，

∴ $3a + b = 3a - 2a = a < 0$ ，所以①正确．

$$\therefore 2 \leq c \leq 3,$$

而 $c = -3a$ ，

$$\therefore 2 \leq -3a \leq 3,$$

∴ $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ ，所以②正确．

∵抛物线的顶点坐标为 $(1, n)$ ，

∴当 $x = 1$ 时，二次函数有最大值 $n$ ，

$$\therefore a + b + c \geq am^2 + bm + c,$$

即 $a + b \geq am^2 + bm$ ，所以③正确．

∵抛物线的顶点坐标 $(1, n)$ ，

∴抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = n - 1$ 有两个交点，

∴关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = n - 1$ 有两个不相等的实数根，所以④正确．

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

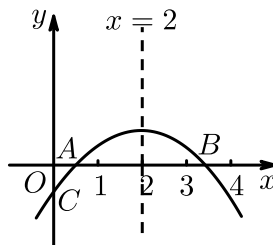
7. 关于下列结论：①二次函数 $y = 6x^2$ ，当 $x > 0$ 时， $y$ 随 $x$ 的增大而增大．②关于 $x$ 的方程 $a(x+m)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$ ， $a, m, b$ 均为常数， $a \neq 0$ ，则方程 $a(x+m+2)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -4$ ， $x_2 = -1$ ．③设二次函数 $y = x^2 + bx + c$ ，当 $x \leq 1$ 时，总有 $y \geq 0$ ，当 $1 \leq x \leq 3$ 时，总有 $y \leq 0$ ，那么 $c$ 的取值范围是 $c \geq 3$ ．其中，正确结论的个数数（ ）．
- A. 0个                      B. 1个                      C. 2个                      D. 3个

【答案】D

【解析】① $\because$ 二次函数 $y = 6x^2$ 中， $6 > 0$ ，对称轴 $y$ 轴， $\therefore$ 当 $x > 0$ 时， $y$ 随 $x$ 的增大而增大．  
② $\because$ 方程 $a(x+m)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 1$ ， $a, m, b$ 均为常数， $a \neq 0$ ， $\therefore$ 可将方程变形为 $a[(x+2)+m]^2 + b = 0$ ，即此方程中 $x+2 = -2$ 或者 $x+2 = 1$ ，解得 $x = -4$ 或 $x = -1$ ．  
③ $\because$ 当 $x \leq 1$ 时，总有 $y \geq 0$ ，当 $1 \leq x \leq 3$ 时，总有 $y \leq 0$ ，  
 $\therefore$ 函数图像过点 $(1, 0)$ ，即 $1 + b + c = 0$ ①，  
 $\therefore$ 当 $1 \leq x \leq 3$ 时，总有 $y \leq 0$ ，  
 $\therefore$ 当 $x = 3$ 时， $y = 9 + 3b + c \leq 0$ ②，  
①②联立解得： $c \geq 3$ ．

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

8. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象与 $x$ 轴正半轴相交于 $A, B$ 两点，与 $y$ 轴相交于点 $C$ ，对称轴为直线 $x = 2$ ，且 $OA = OC$ ，则下列结论：① $abc > 0$ ．② $9a + 3b + c > 0$ ．③ $c > -1$ ．④关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 有一个根为 $-\frac{1}{a}$ ．⑤抛物线上有两点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$ ，若 $x_1 < 2 < x_2$ ，且 $x_1 + x_2 > 4$ ，则 $y_1 > y_2$ ．其中正确的结论有（ ）．



- A. 2个                      B. 3个                      C. 4个                      D. 5个

【答案】D

【解析】由抛物线的开口可知： $a < 0$ ，

由抛物线与 $y$ 轴的交点可知： $c < 0$ ，

由抛物线的对称轴可知： $-\frac{b}{2a} > 0$ ，

$\therefore b > 0$ ，

$\therefore abc > 0$ ，故①正确．

令 $x = 3$ ， $y > 0$ ，

$\therefore 9a + 3b + c > 0$ ，故②正确．

$\therefore OA = OC < 1$ ，

$\therefore c > -1$ ，故③正确．

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 2$ ，

$\therefore -\frac{b}{2a} = 2$ ，

$\therefore b = -4a$ ，

$\therefore OA = OC = -c$ ，

$\therefore$ 当 $x = -c$ 时， $y = 0$ ，

$\therefore ac^2 - bc + c = 0$ ，

$\therefore ac - b + 1 = 0$ ，

$\therefore ac + 4a + 1 = 0$ ，

$\therefore c = -\frac{4a+1}{a}$ ，

$\therefore$ 设关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 有一个根为 $x$ ，

$\therefore x - c = 4$ ，

$\therefore x = c + 4 = -\frac{1}{a}$ ，故④正确．

$\therefore x_1 < 2 < x_2$ ，

$\therefore P, Q$ 两点分布在对称轴的两侧，

$\therefore 2 - x_1 - (x_2 - 2)$

$= 2 - x_1 - x_2 + 2$

$= 4 - (x_1 + x_2) < 0$ ，

即 $x_1$ 到对称轴的距离小于 $x_2$ 到对称轴的距离，

$\therefore y_1 > y_2$ ，故⑤正确．

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

9. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$ 是常数， $a \neq 0$ ) 的自变量 $x$ 与函数值 $y$ 的部分对应值如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|



|                     |         |      |     |     |     |         |
|---------------------|---------|------|-----|-----|-----|---------|
| $x$                 | $\dots$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $3$ | $\dots$ |
| $y = ax^2 + bx + c$ | $\dots$ | $n$  | $3$ | $m$ | $3$ | $\dots$ |

且当 $x = \frac{3}{2}$ 时, 与其对应的函数值 $y < 0$ . 有下列结论: ① $abc < 0$ ; ②3是关于 $x$ 的方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的一个根; ③ $6 < m + n < \frac{26}{3}$ . 其中, 正确结论的个数是 ( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】由表格可知:  $x = 0$ 或 $x = 3$ 时,  $y = 3$ ,

故抛物线对称轴为 $-\frac{b}{2a} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $c = 3 > 0$ ,

又当 $x = \frac{3}{2}$ 时,  $y < 0$ , 故 $a > 0$ ,  $b < 0$ , 故 $abc < 0$ , 故①正确;

由表格可知:  $x = 3$ 时,  $y = ax^2 + bx + c = 3$ , 且 $(3, 3)$ 在直线 $y = x$ 上,

故 $(3, 3)$ 是 $y = ax^2 + bx + c$ 与 $y = x$ 的一个交点,

即3是关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = x$ , 即 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的一个根, 故②正确;

由表格可知:  $x = 0$ 时,  $y = c = 3$ ;  $x = 3$ 时,  $y = 9a + 3b + c = 3$ , 即 $b = -3a$ ,

当 $x = -1$ 时,  $n = a - b + c$ ,  $x = 1$ 时,  $m = a + b + c$ ,

$\therefore m + n = a - b + c + a + b + c = 2a + 2c = 2a + 6$ ,

又当 $x = \frac{3}{2}$ 时,  $y = \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c < 0$ ,  $-\frac{9}{4}a < -3$ ,  $a > \frac{4}{3}$ ,

$\therefore m + n = 2a + 6 = \frac{26}{3}$ , 故③错误.

综上, 正确的是①②, 共2个.

故选C.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 $x$ 轴交于点 $A(-1, 0)$ , 与 $y$ 轴的交点 $B$ 在 $(0, -2)$ 与 $(0, -3)$ 之间 (不包括这两点), 对称轴为直线 $x = 2$ .

下列结论: ① $abc > 0$ ; ② $9a + 3b + c < 0$ ; ③若点 $M\left(\frac{1}{2}, y_1\right)$ , 点 $N\left(\frac{5}{2}, y_2\right)$ 是函数图象上的两点, 则 $y_1 < y_2$ ; ④ $-\frac{24}{5} < a + b + c < -\frac{16}{5}$ . 其中正确结论的个数是 ( ).

A. 4个

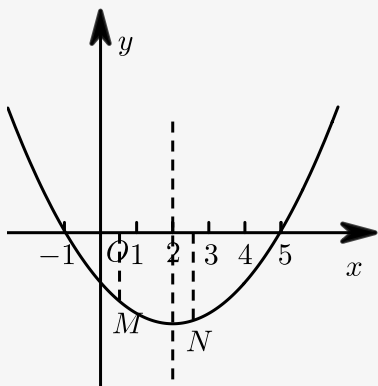
B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】B

【解析】∵图象与 $x$ 轴交于点 $A(-1, 0)$ ,



与 $y$ 轴交点 $B$ 在 $(0, -2)$ 与 $(0, -3)$ 之间,

对称轴为 $x = 2$ ,

∴ $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c < 0$ ,

∴① $abc > 0$ 正确;

②当 $x = 3$ 时,

$$y = 9a + 3b + c,$$

∴ $9a + 3b + c < 0$ 正确;

③若点 $M\left(\frac{1}{2}, y_1\right)$ , 点 $N\left(\frac{5}{2}, y_2\right)$

是函数图象上的两点,

∴ $y_1 > y_2$ ,

∴③错误;

$$\because -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore b = -4a,$$

当 $x = -1$ 时,

$$ax^2 + bx + c,$$

$$= a - b + c,$$

$$= a + 4a + c,$$

$$= 5a + c,$$

$$\therefore 5a + c = 0,$$

$$c = -5a,$$

$$\because -3 < c < -2,$$

$$\therefore -\frac{24}{5} < \frac{8}{5}c < -\frac{16}{5},$$

∴④正确.

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

11. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )的图象经过点 $(x_1, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，且 $-2 < x_1 < -1$ ，与 $y$ 轴正半轴的交点在 $(0, 2)$ 的下方，则下列结论：① $abc < 0$ ；② $b^2 > 4ac$ ；③ $2a + b + 1 < 0$ ；④ $2a + c > 0$ ．则其中正确结论的序号是（ ）．

A. ①②

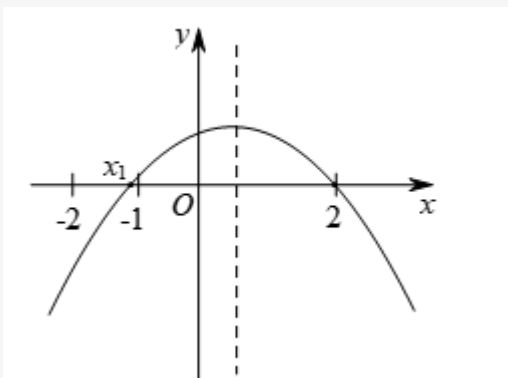
B. ②③

C. ①②④

D. ①②③④

【答案】 C

【解析】 如图，



$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )的图象经过点 $(x_1, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，且 $-2 < x_1 < -1$ ，与 $y$ 轴正半轴相交，

$\therefore a < 0$ ， $c > 0$ ，对称轴在 $y$ 轴右侧，则 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ，

$\therefore b > 0$ ，

$\therefore abc < 0$ ，所以①正确．

$\because$ 抛物线与 $x$ 轴有两个交点，

$\therefore b^2 - 4ac > 0$ ，即 $b^2 > 4ac$ ．所以②正确．

当 $x = 2$ 时， $y = 0$ ，即 $4a + 2b + c = 0$ ，

$\therefore 2a + b + \frac{c}{2} = 0$ ，

$\therefore 0 < c < 2$ ，

$\therefore 2a + b + 1 > 0$ ，所以③错误．

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )的图象经过点 $(x_1, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )的两根为 $x_1, 2$

$\therefore 2x_1 = \frac{c}{a}$ ，即 $x_1 = \frac{c}{2a}$ ，

而 $-2 < x_1 < -1$ ，

$\therefore -2 < \frac{c}{2a} < -1$

$\therefore a < 0$ ，

$\therefore -4a > c > -2a$

$\therefore 2a + c > 0$ ，所以④正确．

故选C.

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

【思想】数形结合思想

12. 已知函数 $y = -(x-m)(x-n) + 3$ , 并且 $a, b$ 是方程 $(x-m)(x-n) = 3$ 的两个根,  $a$ 在 $b$ 的左侧,  $m$ 在 $n$ 的左侧, 则实数 $m, n, a, b$ 的大小关系可能是( ).

- A.  $m < a < b < n$       B.  $m < a < n < b$       C.  $a < m < b < n$       D.  $a < m < n < b$

【答案】D

【解析】函数 $y = -(x-m)(x-n) + 3$ ,

令 $y = 0$ , 根据题意得到方程 $(x-m)(x-n) = 3$ 的两个根为 $a, b$ ,

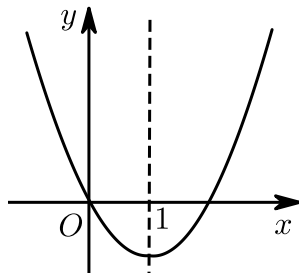
$\therefore$ 当 $x = m$ 或 $n$ 时,  $y = 3 > 0$ ,

$\therefore$ 实数 $m, n, a, b$ 的大小关系为 $a < m < n < b$ .

故选:D.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

13. 二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图象如图, 对称轴为直线 $x = 1$ , 若关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2 + bx - t = 0$  ( $t$ 为实数)在 $-1 < x < 4$ 的范围内有解, 则 $t$ 的取值范围是( ).



- A.  $t \geq -1$       B.  $-1 \leq t < 3$       C.  $-1 \leq t < 8$       D.  $3 < t < 8$

【答案】C

【解析】对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2 \times 1} = 1$ , 解得 $b = -2$ ,

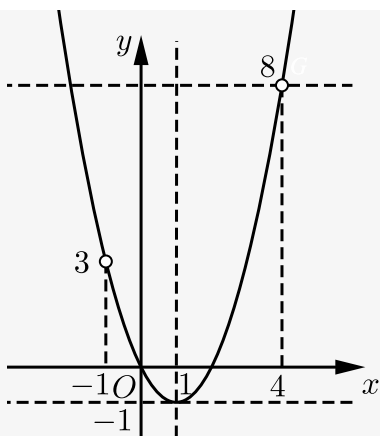
所以, 二次函数解析式为 $y = x^2 - 2x$ ,  $y = (x-1)^2 - 1$ ,

当 $x = -1$ 时,  $y = 1 + 2 = 3$ ; 当 $x = 4$ 时,  $y = 16 - 2 \times 4 = 8$ ,

$\therefore x^2 + bx - t = 0$ 相当于 $y = x^2 + bx$ 与直线 $y = t$ 的交点的横坐标,

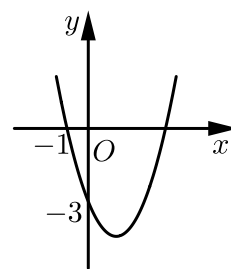
$\therefore$ 当 $-1 \leq t < 8$ 时, 在 $-1 < x < 4$ 的范围内有解.

故选C.



【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

14. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 过点 $(-1, 0)$ 和点 $(0, -3)$ ，且顶点在第四象限，设 $P = a + b + c$ ，则 $P$ 的取值范围是（ ）。



- A.  $-3 < P < -1$       B.  $-6 < P < 0$       C.  $-3 < P < 0$       D.  $-6 < P < -3$

【答案】B

【解析】∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 过点 $(-1, 0)$ 和点 $(0, -3)$ ，

$$\therefore 0 = a - b + c, -3 = c,$$

$$\therefore b = a - 3,$$

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = ax^2 + bx + c = a + b + c,$$

$$\therefore P = a + b + c = a + a - 3 - 3 = 2a - 6,$$

$$\therefore \text{顶点在第四象限, } a > 0,$$

$$\therefore b = a - 3 < 0,$$

$$\therefore a < 3,$$

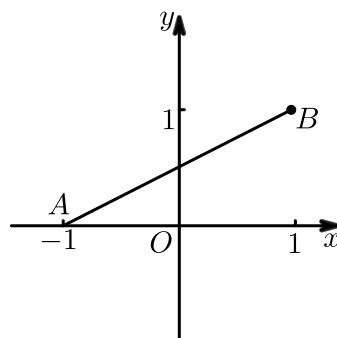
$$\therefore 0 < a < 3,$$

$$\therefore -6 < 2a - 6 < 0,$$

$$\text{即 } -6 < P < 0.$$

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

15. 在平面直角坐标系内，已知点 $A(-1, 0)$ ，点 $B(1, 1)$ 都在直线 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 上，若抛物线 $y = ax^2 - x + 1 (a \neq 0)$ 与线段 $AB$ 有两个不同的交点，则 $a$ 的取值范围是（ ）.



- A.  $a \leq -2$       B.  $a < \frac{9}{8}$       C.  $1 \leq a < \frac{9}{8}$  或  $a \leq -2$       D.  $-2 \leq a < \frac{9}{8}$

**【答案】** C

**【解析】**  $\because$  抛物线 $y = ax^2 - x + 1 (a \neq 0)$ 与线段 $AB$ 有两个不同的交点，

$$\therefore \text{令 } \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = ax^2 - x + 1, \text{ 则 } 2ax^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$\therefore \Delta = 9 - 8a > 0,$$

$$\therefore a < \frac{9}{8},$$

$$\text{①当 } a < 0 \text{ 时, } \begin{cases} a + 1 + 1 \leq 0 \\ a - 1 + 1 \leq 1 \end{cases}, \text{ 解得: } a \leq -2,$$

$$\therefore a \leq -2;$$

$$\text{②当 } a > 0 \text{ 时, } \begin{cases} a + 1 + 1 \geq 0 \\ a - 1 + 1 \geq 1 \end{cases}, \text{ 解得: } a \geq 1,$$

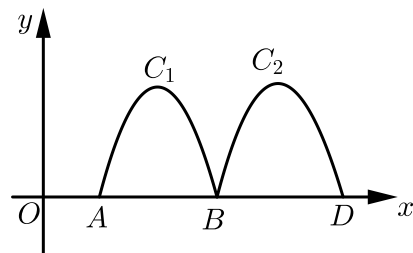
$$\therefore 1 \leq a < \frac{9}{8},$$

$$\text{综上所述: } 1 \leq a < \frac{9}{8} \text{ 或 } a \leq -2.$$

故选C.

**【标注】** 【知识点】定直线（线段）与动抛物线交点问题

16. 如图，抛物线 $y = -2x^2 + 8x - 6$ 与 $x$ 轴交于点 $A$ 、 $B$ ，把抛物线在 $x$ 轴及其上方的部分记作 $C_1$ ，将 $C_1$ 向右平移得 $C_2$ ， $C_2$ 与 $x$ 轴交于点 $B$ 、 $D$ ．若直线 $y = x + m$ 与 $C_1$ 、 $C_2$ 共有3个不同的交点，则 $m$ 的取值范围是（ ）.



- A.  $-2 < m < \frac{1}{8}$       B.  $-3 < m < -\frac{7}{4}$       C.  $-3 < m < -2$       D.  $-3 < m < -\frac{15}{8}$

**【答案】** D

**【解析】** 令  $y = -2x^2 + 8x - 6 = 0$ ,

$$\text{即 } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

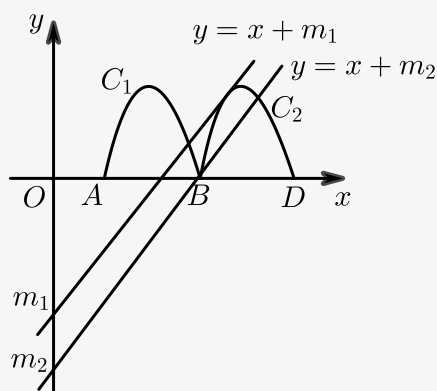
解得  $x = 1$  或  $3$ ,

则点  $A(1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,

由于将  $C_1$  向右平移 2 个长度单位得  $C_2$ ,

则  $C_2$  解析式为

$$y = -2(x - 4)^2 + 2 \quad (3 \leq x \leq 5)$$



当  $y = x + m_1$  与  $C_2$  相切时,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x + m_1 \\ y = -2(x - 4)^2 + 2 \end{cases}$$

$$\text{即 } 2x^2 - 15x + 30 + m_1 = 0,$$

$$\Delta = -8m_1 - 15 = 0,$$

$$\text{解得 } m_1 = -\frac{15}{8},$$

当  $y = x + m_2$  过点  $B(3, 0)$  时,

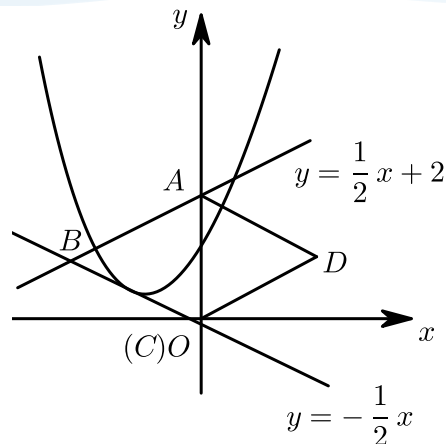
$$\text{即 } 3 + m_2 = 0,$$

$$m_2 = -3,$$

当  $-3 < m < -\frac{15}{8}$  时直线  $y = x + m$  与  $C_1$ 、 $C_2$  共有 3 个不同的交点.

**【标注】** 【知识点】二次函数平移变换

17. 如图, 直线  $y = \frac{1}{2}x + 2$  与  $y$  轴交于点  $A$ , 与直线  $y = -\frac{1}{2}x$  交于点  $B$ , 以  $AB$  为边向右做菱形  $ABCD$ , 点  $C$  恰与原点  $O$  重合, 抛物线  $y = (x - h)^2 + k$  的顶点在直线  $y = -\frac{1}{2}x$  上移动, 若抛物线与菱形的边  $AB$ 、 $BC$  都有公共点, 则  $h$  的取值范围是 ( ).



- A.  $-2 \leq h \leq \frac{1}{2}$       B.  $-2 \leq h \leq 1$       C.  $-1 \leq h \leq \frac{3}{2}$       D.  $-1 \leq h \leq \frac{1}{2}$

**【答案】** A

**【解析】**

$$\because \text{将 } y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ 和 } y = -\frac{1}{2}x \text{ 联立得 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases},$$

$\therefore$  点  $B$  坐标为  $(-2, 1)$ ,

由抛物线的解析式可知抛物线的顶点坐标为  $(h, k)$ ,

$\therefore$  将  $x = h, y = k$ , 代入  $y = -\frac{1}{2}x$  得:  $k = -\frac{1}{2}h$ ,

$\therefore$  抛物线解析式为  $y = (x - h)^2 - \frac{1}{2}h$ ,

如图1所示: 当抛物线经过点  $C$  时,

将  $C(0, 0)$  代入  $y = (x - h)^2 - \frac{1}{2}h$  得:  $h^2 - \frac{1}{2}h = 0$ , 解得:  $h_1 = 0$  (舍去),

$$h_2 = \frac{1}{2},$$

如图2所示: 当抛物线经过点  $B$  时,

将  $B(-2, 1)$  代入  $y = (x - h)^2 - \frac{1}{2}h$  得:  $2h^2 + 7h + 6 = 0$ , 解得:  $h_1 = -\frac{3}{2}$  (舍

去),  $h_2 = -2$ ,

综上所述,  $h$  的范围是  $-2 \leq h \leq \frac{1}{2}$ .

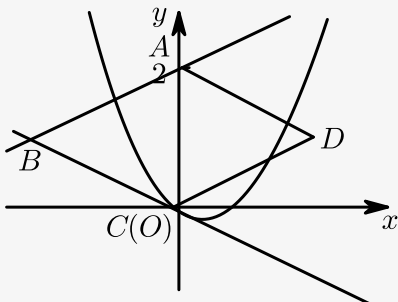


图 1

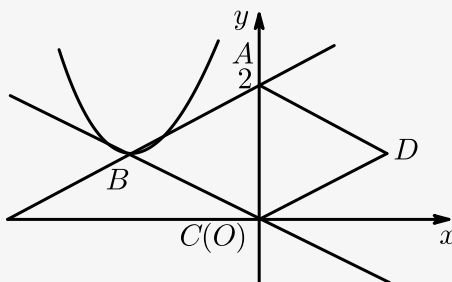


图 2

**【标注】**【知识点】二次函数与几何图形交点问题



## 二、存在性问题

18. 已知抛物线  $y = x^2 - 2mx - 4 (m > 0)$  的顶点  $M$  关于坐标原点  $O$  的对称点为点  $M'$ ，若点  $M'$  在这条抛物线上，则点  $M$  的坐标为 ( ) .

A. (1, -5)

B. (2, -8)

C. (3, -13)

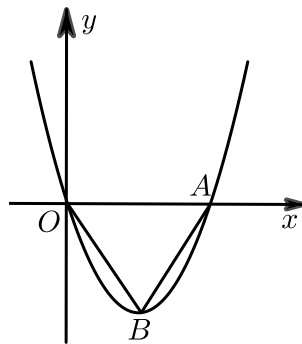
D. (4, -20)

【答案】 B

【解析】 顶点  $M(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$  ,  
 $a, b$  代入得  $M(m, -4 - m^2)$   
 $M'$  为  $(m, 4 + m^2)$  ,  $M'$  在抛物线上 ,  
 $\therefore (-m)^2 - 2m \times (-m) - 4 = 4 + m^2, (m > 0)$   
 $m_1 = 2, m_2 = -2$  (舍去)  
 $\therefore$  坐标为  $(2, -8)$   
 故选 B .

【标注】 【题型】 顶点坐标

19. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$  过原点  $O$ ，与  $x$  轴另一交点为  $A$ ，顶点为  $B$ ，若  $\triangle AOB$  为等边三角形，则  $b$  的值为 ( ) .



A.  $-\sqrt{3}$

B.  $-2\sqrt{3}$

C.  $-3\sqrt{3}$

D.  $-4\sqrt{3}$

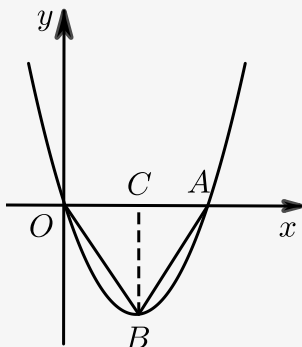
【答案】 B

【解析】 方法一：抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$  过原点  $O$  ,  
 $\therefore c = 0$  ,  $B(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2}{4a})$  ,  
 $\therefore \triangle AOB$  为等边三角形 ,  
 $\therefore \frac{-b^2}{4a} = \tan 60^\circ \times (-\frac{b}{2a})$  ,

$$\therefore b = -2\sqrt{3}.$$

故选B.

方法二：如图，作 $BC \perp OA$ ，则 $\text{Rt}\triangle BOC$ 为含 $30^\circ$ 角的直角三角形，



$$\therefore OC : BC = 1 : \sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{顶点 } B\left(-\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{3}b}{2a}\right).$$

$\therefore$  抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 过原点 $O$ ,

$$\therefore c = 0.$$

$$\therefore \text{顶点的纵坐标为 } \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2}{4a}.$$

$$\therefore -\frac{b^2}{4a} = \frac{\sqrt{3}b}{2a}$$

$$\text{化简, 得 } b^2 + 2\sqrt{3}b = 0.$$

$$\therefore b_1 = 0 \text{ (舍去)}, b_2 = -2\sqrt{3}.$$

故选B.

**【标注】**【知识点】二次函数与等边三角形结合

20. 已知直线 $y = -\sqrt{3}x + 3$ 与坐标轴分别交于点 $A, B$ , 点 $P$ 在抛物线 $y = -\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^2 + 4$ 上, 能使 $\triangle ABP$ 为等腰三角形的点 $P$ 的个数有( ).

A. 3个

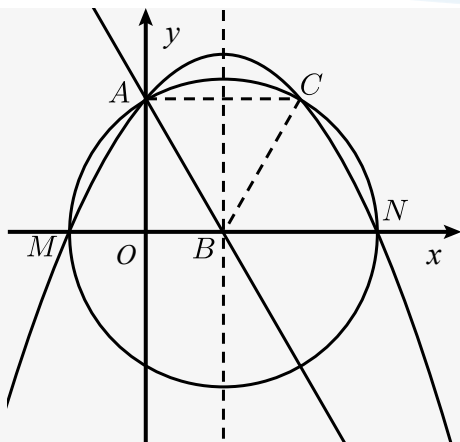
B. 4个

C. 5个

D. 6个

**【答案】** A

**【解析】** 以点 $B$ 为圆心、线段 $AB$ 长为半径作圆, 交抛物线于点 $C, M, N$ , 连接 $AC, BC$ , 如图所示.



令一次函数  $y = -\sqrt{3}x + 3$  中  $x = 0$ ，则  $y = 3$ ，

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(0, 3)$ 。

令一次函数  $y = -\sqrt{3}x + 3$  中  $y = 0$ ，则  $-\sqrt{3}x + 3 = 0$ ，

解得： $x = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(\sqrt{3}, 0)$ 。

$\therefore AB = 2\sqrt{3}$ 。

$\therefore$  抛物线的对称轴为  $x = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(2\sqrt{3}, 3)$ ，

$\therefore AC = 2\sqrt{3} = AB = BC$ ，

$\therefore \triangle ABC$  为等边三角形。

令  $y = -\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^2 + 4$  中  $y = 0$ ，则  $-\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^2 + 4 = 0$ ，

解得： $x = -\sqrt{3}$  或  $x = 3\sqrt{3}$ 。

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(-\sqrt{3}, 0)$ ，点  $N$  的坐标为  $(3\sqrt{3}, 0)$ 。

$\triangle ABP$  为等腰三角形分三种情况：

① 当  $AB = BP$  时，以  $B$  点为圆心， $AB$  长度为半径做圆，与抛物线交于  $C$ 、 $M$ 、 $N$  三点，

② 当  $AB = AP$  时，以  $A$  点为圆心， $AB$  长度为半径做圆，与抛物线交于  $C$ 、 $M$  两点，

③ 当  $AP = BP$  时，作线段  $AB$  的垂直平分线，交抛物线交于  $C$ 、 $M$  两点。

$\therefore$  能使  $\triangle ABP$  为等腰三角形的点  $P$  的个数有 3 个。

**【标注】**【知识点】二次函数与等腰三角形结合

21. 已知抛物线  $y = k(x + 1)(x - \frac{3}{k})$  与  $x$  轴交于点  $A$ ， $B$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ，则能使  $\triangle ABC$  为等腰三角形的抛物线的条数是 ( )。

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】 $y = k(x+1)(x - \frac{3}{k}) = (x+1)(kx - 3)$ ，  
所以，抛物线经过点 $A(-1, 0)$ ， $C(0, -3)$

$$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

点 $B$ 坐标为 $(\frac{3}{k}, 0)$ ，

① $k > 0$ 时，点 $B$ 在 $x$ 正半轴上，

若 $AC = BC$ ，则 $\sqrt{(\frac{3}{k})^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，解得 $k = 3$ 。

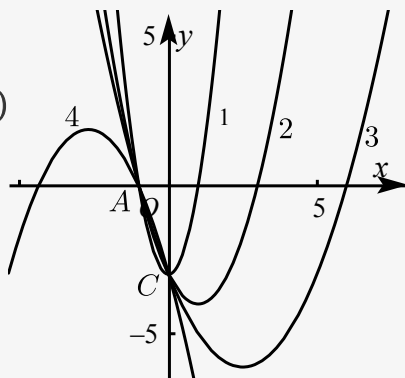
若 $AC = AB$ ，则 $\frac{3}{k} + 1 = \sqrt{10}$ ，解得 $k = \frac{3}{\sqrt{10} - 1} = \frac{\sqrt{10} + 1}{3}$ ，

若 $AB = BC$ ，则 $\frac{3}{k} + 1 = \sqrt{(\frac{3}{k})^2 + 3^2}$ ，解得 $k = \frac{3}{4}$ ；

② $k < 0$ 时，点 $B$ 在 $x$ 轴的负半轴，点 $B$ 只能在点 $A$ 的左侧，

只有 $AC = AB$ ，则 $-1 - \frac{3}{k} = \sqrt{10}$ ，解得 $k = -\frac{3}{\sqrt{10} + 1} = -\frac{\sqrt{10} - 1}{3}$ 。

所以，能使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的抛物线共有4条。



【标注】【知识点】二次函数与等腰三角形结合

22. 小飞研究二次函数 $y = -(x-m)^2 - m + 1$  ( $m$ 为常数) 性质时有如下结论：

①这个函数图象的顶点始终在直线 $y = -x + 1$ 上；

②存在一个 $m$ 的值，使得函数图象的顶点与 $x$ 轴的两个交点构成等腰直角三角形；

③点 $A(x_1, y_1)$ 与点 $B(x_2, y_2)$ 在函数图象上，若 $x_1 < x_2$ ， $x_1 + x_2 > 2m$ ，则 $y_1 < y_2$ ；

④当 $-1 < x < 2$ 时， $y$ 随 $x$ 的增大而增大，则 $m$ 的取值范围为 $m \geq 2$ 。

其中错误结论的序号是 ( )。

A. ①

B. ②

C. ③

D. ④

【答案】C

【解析】二次函数 $y = -(x-m)^2 - m + 1$  ( $m$ 为常数)，

①∵顶点坐标为 $(m, -m + 1)$ 且当 $x = m$ 时， $y = -m + 1$ ，

∴这个函数图象的顶点始终在直线 $y = -x + 1$ 上，

故结论①正确；

②假设存在一个 $m$ 的值，使得函数图象的顶点与 $x$ 轴的两个交点构成等腰直角三角形。

令 $y = 0$ ，得 $-(x - m)^2 - m + 1 = 0$ ，其中 $m < 1$ ，

解得： $x = m - \sqrt{-m + 1}$ ， $x = m + \sqrt{-m + 1}$ 。

$\therefore$  顶点坐标为 $(m, -m + 1)$ ，且顶点与 $x$ 轴的两个交点构成等腰直角三角形，

$\therefore |-m + 1| = \left| m - (m - \sqrt{-m + 1}) \right|$ ，

解得： $m = 0$ 或 $1$ （舍去），

$\therefore$  存在 $m = 0$ ，使得函数图象的顶点与 $x$ 轴的两个交点构成等腰直角三角形，

故结论②正确；

③ $\because x_1 + x_2 > 2m$ ，

$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} > m$ ，

$\therefore$  二次函数 $y = -(x - m)^2 - m + 1$ （ $m$ 为常数）的对称轴为直线 $x = m$ ，

$\therefore$  点 $A$ 离对称轴的距离小于点 $B$ 离对称轴的距离，

$\therefore x_1 < x_2$ ，且 $-1 < 0$ ，开口向下，

$\therefore y_1 > y_2$ ，

故结论③错误；

④当 $-1 < x < 2$ 时， $y$ 随 $x$ 的增大而增大，且 $-1 < 0$ ，开口向下，

$\therefore m$ 的取值范围为 $m \geq 2$ 。

故结论④正确。

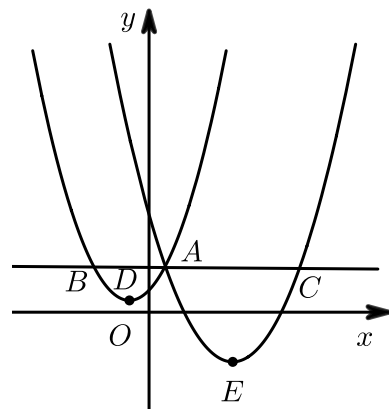
故选C。

**【标注】**【知识点】二次函数与等腰直角三角形结合

23. 如图，抛物线 $y_1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 1$ 与 $y_2 = a(x - 4)^2 - 3$ 交于点 $A(1, 3)$ ，过点 $A$ 作 $x$ 轴的平行线，分别交两条抛物线于 $B$ 、 $C$ 两点，且 $D$ 、 $E$ 分别为顶点。则下列结论：

① $a = \frac{2}{3}$ 。② $AC = AE$ 。③ $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形。④当 $x > 1$ 时， $y_1 > y_2$ 。

其中正确结论的个数是（ ）。



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 B

【解析】  $\because$  抛物线  $y_1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1$  与  $y_2 = a(x-4)^2 - 3$  交于点  $A(1, 3)$ ,

$$\therefore 3 = a(1-4)^2 - 3,$$

解得:  $a = \frac{2}{3}$ , 故①正确.

过点  $E$  作  $EF \perp AC$  于点  $F$ ,

$\because E$  是抛物线的顶点,

$$\therefore AE = EC, E(4, -3),$$

$$\therefore AF = 3, EF = 6,$$

$$\therefore AE = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}, AC = 2AF = 6,$$

$\therefore AC \neq AE$ , 故②错误.

$$\text{当 } y_1 = 3 \text{ 时, } 3 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1,$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, x_2 = -3,$$

$$\text{故 } B(-3, 3), D(-1, 1),$$

$$\text{则 } AB = 4, AD = BD = 2\sqrt{2},$$

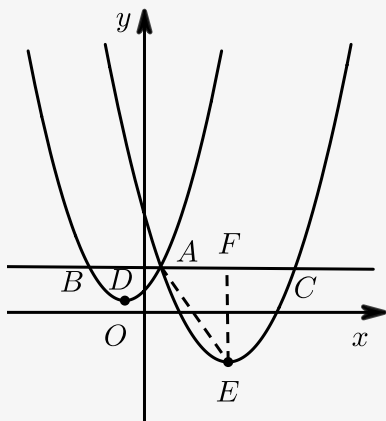
$$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2,$$

$\therefore \triangle ABD$  是等腰直角三角形, ③正确.

$$\therefore \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1 = \frac{2}{3}(x-4)^2 - 3 \text{ 时,}$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, x_2 = 37,$$

$\therefore$  当  $1 < x < 37$  时,  $y_1 > y_2$ , 故④错误.



【标注】 【知识点】 二次函数与等腰直角三角形结合

24. 如图, 已知抛物线  $y_1 = -2x^2 + 2$ , 直线  $y_2 = 2x + 2$ , 当  $x$  任取一值时,  $x$  对应的函数值分别为  $y_1$ ,  $y_2$ . 若  $y_1 \neq y_2$ , 取  $y_1$ ,  $y_2$  中的较小的值记为  $M$ ; 若  $y_1 = y_2$ , 记  $M = y_1 = y_2$ .  
例如: 当  $x = 1$  时,  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 4$ ,  $y_1 < y_2$ , 此时  $M = 0$ .

下列判断：

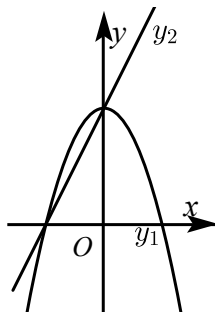
①当 $x > 0$ 时， $y_1 > y_2$  .

②当 $x < 0$ 时， $x$ 值越大， $M$ 值越小 .

③使得 $M$ 大于2的 $x$ 值不存在 .

④使得 $M = 1$ 的 $x$ 值是 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$  .

其中正确的结论有 \_\_\_\_\_ .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 B

【解析】 当 $x > 0$ 时， $y_1 < y_2$ ，故①错误 .

当 $x < 0$ 时， $y_1$ 、 $y_2$ 都随 $x$ 的增大而增大，

则 $x$ 值越大， $M$ 值越大，故②错误 .

因为抛物线 $y_1 = -2x^2 + 2$ 有最大值为2，

所以 $y_1$ 、 $y_2$ 中的较小值 $M$ 不可能大于2，故③正确 .

若 $-2x^2 + 2 = 1$ ，解得 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时， $M = 1$  .

若 $2x + 2 = 1$ ，解得 $x = -\frac{1}{2}$ ，

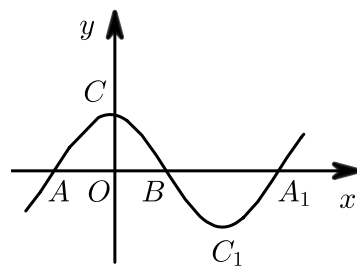
此时 $M = 1$ ，

故④正确 .

故选：B .

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

25. 如图，抛物线 $m: y = ax^2 + b$  ( $a < 0, b > 0$ ) 与 $x$ 轴交于点 $A$ 、 $B$  (点 $A$ 在点 $B$ 的左侧)，与 $y$ 轴交于点 $C$  . 将抛物线 $m$ 绕点 $B$ 旋转 $180^\circ$ ，得到新的抛物线 $n$ ，它的顶点为 $C_1$ ，与 $x$ 轴的另一个交点为 $A_1$  . 若四边形 $AC_1A_1C$ 为矩形，则 $a, b$ 应满足的关系式为 ( ) .



A.  $ab = -2$

B.  $ab = -3$

C.  $ab = -4$

D.  $ab = -5$

**【答案】** B

**【解析】** 令  $x = 0$ , 得:  $y = b \therefore C(0, b)$ ,

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得: } ax^2 + b = 0, \therefore x = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}},$$

$$\therefore A\left(-\sqrt{-\frac{b}{a}}, 0\right), B\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}, 0\right),$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{-\frac{b}{a}}, BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b}{a}},$$

要使平行四边形  $AC_1A_1C$  是矩形, 必须满足  $AB = BC$ ,

$$\therefore 2\sqrt{-\frac{b}{a}} = \sqrt{b^2 - \frac{b}{a}},$$

$$4 \times \left(-\frac{b}{a}\right) = b^2 - \frac{b}{a},$$

$$\therefore ab = -3,$$

$\therefore a, b$  应满足关系式  $ab = -3$ .

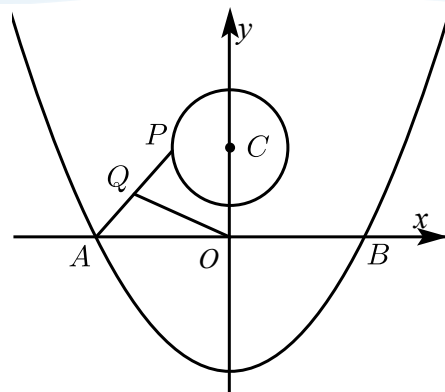
故选 B.

**【标注】** 【知识点】二次函数图象旋转  $90^\circ$

### 三、二次函数与圆

26. 如图, 抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点,  $P$  是以点  $C(0, 3)$  为圆心、2 为半径的圆上的动点,  $Q$  是线段  $PA$  的中点, 连接  $OQ$ . 则线段  $OQ$  的最大值是 ( ).





A. 3

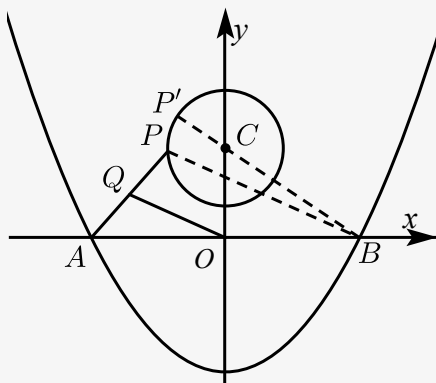
B.  $\frac{\sqrt{41}}{2}$

C.  $\frac{7}{2}$

D. 4

**【答案】** C

**【解析】** 如图，连接  $BP$ ，



当  $y = 0$  时， $\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0$ ，解得  $x_1 = 4$ ， $x_2 = -4$ ，则  $A(-4, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，

$\because Q$  是线段  $PA$  的中点，

$\therefore OQ$  为  $\triangle ABP$  的中位线，

$\therefore OQ = \frac{1}{2}BP$ ，

当  $BP$  的值最大时， $OQ$  的值最大，

而  $BP$  过圆心  $C$  时， $BP$  的值最大，如图，点  $P$  运动到  $P'$  位置时， $BP$  的值最大，最大值为  $BP'$  的长度，

$\because BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

$\therefore BP' = 5 + 2 = 7$ ，

$\therefore$  线段  $OQ$  的最大值是  $\frac{7}{2}$ 。

故选 C。

**【标注】** 【知识点】二次函数与圆的综合问题